Departamento de Matemáticas

Cálculo para la Edificación (UEX500975)

Primer examen parcial (11.11.2024) — **Esquemas de resolución**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Cuestión 0.ª.0.A

[•] En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Esquema de resolución.— Llamemos A al conjunto dado. Hallémoslos, razonadamente.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in \mathring{A}$. Por definición de interior, $1/n \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \subseteq A)$, lo que es imposible, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+$, siempre hay puntos de $A^\complement$ en la bola, por ejemplo, el punto medio de $1/n$ y el menor entre $1/n + r$ y $1/(n-1)$ no está en A, o sea,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \text{mín}\left\{\frac{1}{n} + r, \frac{1}{n-1}\right\}\right) \notin A.$$

Luego, $\mathring{A} = \emptyset$.

Frontera.— Por definición de frontera, $1/n \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(1/n, r) \cap A^\complement \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior, todas las bolas de centro $1/n$ tienen intersección con $A^\complement$; por otra parte, los centros $1/n$ son de A, por lo que también tienen intersección con A; luego $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in \delta A$. Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ningún $x \in (1/(n+1), 1/n)$ está en la frontera, pues es posible encontrar una bola centrada en x sin intersección con A, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de x a $1/(n+1)$ y a $1/n$, esto es,

$$r < \text{mín}\left\{\left|x - \frac{1}{n+1}\right|, \left|x - \frac{1}{n}\right|\right\}.$$

Tampoco, por un razonamiento similar, ningún elemento de $(-\infty, 0)$ ni de $(1, \infty)$ está en la frontera. Para 0, el único número real que nos queda por analizar, la situación es diferente, para él sí que es cierto que sea cual sea la bola centrada en cero tiene intersección con A y con su complementario $A^\complement$; en efecto, la tiene con $A^\complement$ porque $0 \in A^\complement$ y la tiene con A porque dada una bola de centro 0 y radio $r \in \mathbb{R}^+$, todos los $1/n$ con $n > 1/r$ están en dicha bola; por lo que $0 \in \delta A$. En definitiva, $\delta A = A \cup \{0\}$.

Frontera interior.— $\delta_i A = \delta A \cap A = A$.

Frontera exterior.— $\delta_e A = \delta A \cap A^\complement = \{0\}$.

Exterior.— $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus (\mathring{A} \cup \delta A)$, por lo que $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus (\emptyset \cup (A \cup \{0\})) = \mathbb{R} \setminus A \setminus \{0\}$.

Adherencia.— $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A$, por lo que $\overline{A} = \emptyset \cup (A \cup \{0\}) = A \cup \{0\}$.

Isla.— Como $A^s \subseteq A$, nos preguntamos para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in A^s$. Por definición de isla, $1/n \in A^s$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \cap A = \{1/n\})$, lo que es posible para cualquier $1/n$, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de $1/n$ al anterior y al posterior a $1/n$, es decir,

$$r < \text{mín}\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right|\right\};$$

luego, $A^s = A$.

Acumulación.— Como $\{A', A^s\}$ es una partición de $\overline{A}$, entonces $A' = \overline{A} \setminus A^s = (A \cup \{0\}) \setminus A = \{0\}$. □

Cuestión 0.ª.0.B

[•] Demostremos por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Esquema de resolución.— Demostremos primero un lema.

Lema.— $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n^2 es par, entonces n es par.

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

Demostración del lema.— Usemos para ello reducción al absurdo; en efecto, si n^2 es par, no puede ser n impar, porque si lo fuese, entonces $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k + 1)$, de donde $(\exists k \in \mathbb{Z})(n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 1^2 + 4k = 2(2k^2 + 2k) + 1)$, esto es, $(\exists k' \in \mathbb{Z})(n^2 = 2k' + 1)$, es decir, n^2 es impar; he aquí el absurdo, n^2 es a la vez impar y par.

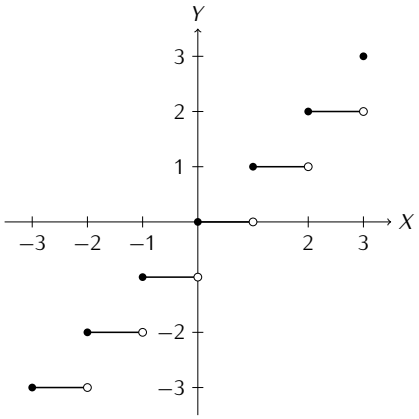
Demostremos ahora que $\sqrt{2}$ no es un número racional, también por reducción al absurdo.

Supongamos que existen $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, tales que $\sqrt{2} = p/q$, siendo p/q una fracción irreducible (*i. e.*, $\mathrm{m.c.d.}(p, q) = 1$). De aquí, $p^2 = 2q^2$, esto es, p^2 es par, de donde, por el lema, p es par, es decir, $(\exists k \in \mathbb{Z})(p = 2k)$, por lo que $p^2 = 2^2k^2 = 2q^2$, de donde, $q^2 = 2k^2$, por lo que q^2 es par y así, por el lema, q es par. Al ser p y q ambos pares, p/q es reducible (*i. e.*, $\mathrm{m.c.d.}(p, q) \geq 2$). He aquí el absurdo: p/q es a la vez reducible e irreducible. □

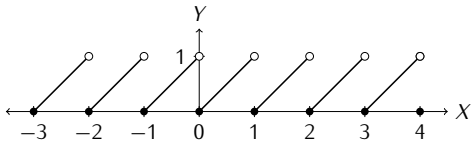
Cuestión 1.ª.1.A

[•] Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x).

Esquema de resolución.— Dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual que x, esto es, $\lfloor x \rfloor = n$ siendo $n \leq x < n + 1$; su representación en $[-3, 3]$ es:



La función que nos interesa es $x - \lfloor x \rfloor$, que atendiendo a la definición anterior es $x - \lfloor x \rfloor = x - n$ con $n \leq x < n + 1$, esto es, si $x \in [n, n + 1)$; su representación en $[-3, 4]$ es:



Como el polinomio $x - n$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, lo es en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, en particular en todos los intervalos abiertos $(n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por esto, la función $x - \lfloor x \rfloor$ sólo es discontinua en los números enteros, presentando en cada uno de ellos una discontinuidad de salto de magnitud 1, siendo en cada uno de ellos continua por la derecha —pues $\lim\limits_{x \to n^+}(x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ n \leq x}}(x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ n \leq x}}(x - n) = n - n = 0$, igual a $f(n) = n - \lfloor n \rfloor = 0$— y discontinua por la izquierda —ya que $\lim\limits_{x \to n^-}(x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x \leq n}}(x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x \leq n}}(x - (n - 1)) = n - (n - 1) = 1$, que no es igual a $f(n)$—. □

Cuestión 1.ª.1.B

[•] Demostremos que si un día, un camión viaja de Cáceres a Badajoz, saliendo a las 7:00, regresando al día siguiente, de Badajoz a Cáceres, saliendo también a las 7:00, yendo ambos viajes por el mismo camino, entonces existe un punto de dicho camino en el que el camión ha estado a la misma hora (instante de tiempo) en ambos viajes.

Esquema de resolución.— En el primer viaje, el camión está en Cáceres (CC) a las 7 y en Badajoz (BA) después de las 7; en el segundo, está en BA a las 7 y en CC después de las 7. Sean las funciones reales de variable real —la variable puede considerarse real pues el camino puede estar representado por cualquier intervalo cerrado real (por ejemplo, tomando $[0, 1]$, CC estaría representado por 0, BA por 1 y cualquier punto del camino entre CC y BA por un punto intermedio entre

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

0 y 1); [CC,BA] designa este hecho—:

$$t_1 : [\text{CC,BA}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto t_1(s) \leftrightharpoons \text{instante de tiempo en el que está en } s \text{ en el primer viaje}$$

$$t_2 : [\text{CC,BA}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto t_2(s) \leftrightharpoons \text{instante de tiempo en el que está en } s \text{ en el segundo viaje}$$

ambas continuas en [CC,BA].

Consideremos la función diferencia

$$t_1 - t_2 : [\text{CC,BA}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto (t_1 - t_2)(s)$$

Tenemos:

I. Esta función es continua en [CC,BA] por ser diferencia de continuas.

II. Además,

$$(t_1 - t_2)(\text{CC}) = t_1(\text{CC}) - t_2(\text{CC}) = 7 - (> 7) < 0,$$
$$(t_1 - t_2)(\text{BA}) = t_1(\text{BA}) - t_2(\text{BA}) = (> 7) - 7 > 0.$$

El teorema de Bolzano para funciones reales de variable real afirma que si una función f es continua en un cerrado $[a, b]$ y satisface que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Como $t_1 - t_2$ satisface las hipótesis de este teorema en [CC,BA] (las anteriores I y II), entonces, de él concluimos que existe $c \in$(CC,BA) tal que $(t_1 - t_2)(c) = 0$, esto es, tal que $t_1(c) = t_2(c)$, en palabras: existe un punto c del camino [CC,BA] para el que el instante de tiempo en el que el camión está en él en el primer viaje es el mismo que el instante de tiempo en el que está en él en el segundo viaje. □

Cuestión 2.ª.2.A

- [•] Supongamos que el valor de un texto en bruto fuese el cuadrado de su número de palabras:
  a. definamos una función real que represente esta situación;
  b. discutamos utilizando derivadas cómo habríamos de partir el texto en dos para que los dos textos obtenidos sumen el mínimo valor posible;
  c. ¿cómo habríamos de hacerlo para que sumasen el máximo valor posible?;
  d. ¿qué teorema asegura la existencia de dicho máximo y por qué?

Cfr. ejercicio resuelto 9.7 (p. 147) de: Abellanas Rapun, Lorenzo, y Galindo Tixaire, Alberto, *Teoría y problemas de métodos de cálculo*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, ISBN: 84-7615-388-0.

Esquema de resolución.—

a. Siendo T el conjunto de textos, t un texto y N_t el número de palabras del texto t, sea la función real,

$$V : \text{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto V(t) = N_t^2$$

O bien, una función real de variable real (en realidad, natural de variable natural) de valoración directa de un número de palabras,

$$V : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto V(n) = n^2$$

b. Dado un texto de N palabras, al dividirlo en dos subtextos, éstos tienen x y $N - x$ palabras, respectivamente; sea la

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

siguiente función real de variable real que representa el valor agregado de los dos subtextos,

$$\begin{aligned} V_2 :[0, N] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto V_2(x) = x^2 + (N - x)^2 \end{aligned}$$

que simplificada es $V_2(x) = 2x^2 - 2Nx + N^2$ (una parábola).

Los puntos críticos son las raíces de la primera derivada:

$$\begin{aligned} V_2'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x - 2N = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{N}{2} \end{aligned}$$

Como $V_2''(x) = 4$, entonces $V_2''(N/2) > 0$, por lo que el criterio de la segunda derivada sobre extremos locales nos informa de que en $x = N/2$ la función V_2 alcanza un mínimo local —un mínimo en el abierto $(0, N)$—.

c. El criterio de la segunda derivada ha localizado un mínimo local en el abierto $(0, N)$, pero dicho criterio no explora los extremos de este intervalo. Para $x = 0$ y $x = N$, la función V_2 toma el mismo valor, a saber, $V_2(0) = V_2(N) = N^2$. Por otra parte, como $V_2(x)$ alcanza en $x = N/2$ el único mínimo en $(0, N)$, V_2 es estrictamente decreciente a la izquierda de $N/2$ y estrictamente creciente a la derecha de $N/2$. En otras palabras, N^2 es un valor máximo de V_2 que se alcanza en los extremos del intervalo $(0, N)$.

A modo de ejemplo, pudiésemos visualizar la parábola V_2 para $N = 3$, por ejemplo, en Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
representa 2x^2 - 2*3*x + 3^2 de x=0 a 3
```

La conclusión es que si buscásemos el valor máximo no debiésemos partir el texto (si, debido a lo que fuese, tuviésemos necesariamente que partir el texto en dos, el valor máximo se alcanzaría con un subtexto de una palabra y el otro subtexto con $N - 1$ palabras).

d. El teorema de Weierstrass para continuidad, pues afirma que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo y su máximo en dicho cerrado. □

Cuestión 2.ª.2.B

☑ ¿En qué intervalos de números reales podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$?

Esquema de resolución.— El teorema de Rolle para funciones reales de variable real afirma que si una función f es continua en un cerrado $[a, b]$, derivable en el abierto (a, b) y satisface que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Analicemos qué sucede con los tres requisitos.

I. Continuidad.— La función $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$, esto es,

$$\begin{aligned} f :\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) &= \begin{cases} \dfrac{1 - x}{1 + x} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{1 + x}{1 - x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

es una función racional (cociente de polinomios) a trozos —funciones que sabemos que son continuas salvo en los puntos que anulan su denominador—, es decir, en cada trozo es continua en $\mathbb{R}$ menos en los puntos que anulan el denominador, $x = -1$ si $x \leq 0$ y $x = 1$ si $x \geq 0$. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en aquellos intervalos que contienen a -1 o a 1.

II. Derivabilidad.— Por ser $f(x)$ una función racional $|x|$ no es derivable en $x = 0$, por lo que debemos analizar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$ (no es posible aplicar la regla de la cadena, pues ésta asume la derivabilidad). Como

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

la función es distinta a los lados de $x = 0$, debemos analizar la derivabilidad lateral. Por un lado, la derivada por la izquierda en $x = 0$ es -2, en efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}(f(0+h) - f(0)) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left(\frac{1-(0+h)}{1+(0+h)} - 1\right)\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\cdot\frac{1-h-1-h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\cdot\frac{-2h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2}{1+h}\\ &= -2;\end{aligned}$$

por otro, la derivada lateral derecha en $x = 0$ es 2:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(f(0+h) - f(0)) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{1+(0+h)}{1-(0+h)} - 1\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot\frac{1+h-1+h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot\frac{2h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2}{1+h}\\ &= 2.\end{aligned}$$

En definitiva, $f(x)$ no es derivable en 0. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en aquellos intervalos que contienen a 0.

III. $f(a) = f(b)$.— Veamos:

$$\begin{aligned}f(a) = f(b) &\Leftrightarrow \frac{1+|a|}{1-|a|} = \frac{1+|b|}{1-|b|}\\ &\Leftrightarrow (1+|a|)(1-|b|) = (1-|a|)(1+|b|)\\ &\Leftrightarrow 1-|b|+|a|-|a||b| = 1+|b|-|a|-|a||b|\\ &\Leftrightarrow 2|a| = 2|b|\\ &\Leftrightarrow |a| = |b|\\ &\Leftrightarrow a = \pm b,\end{aligned}$$

y esto último define un intervalo que contiene a 0, concretamente un intervalo de centro 0 y radio a. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en ningún intervalo real, pues los que contuviesen a 0 habían quedado descartados como consecuencia del requisito de derivabilidad. □

Cuestión 3.ª.3.A

[•] Calculemos utilizando franjas horizontales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$.

Cfr. ejercicio 10.12 (p. 302) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Esquema de resolución.— Calculemos los puntos de corte de la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$:

$$\begin{aligned}(2x-4)^2 = 4x &\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x\\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0,\end{aligned}$$

que tiene por soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, por lo que los puntos de corte son $(1, -2)$ y $(4, 4)$.

Por otra parte, la recta corta al eje de abcisas en $(2, 0)$ y al eje de ordenadas en $(0, -4)$ y la parábola sólo corta a los

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

ejes en $(0,0)$.

Conviene dibujar la situación para tener claro el área de interés y cómo calcularla. Podemos hacerlo, por ejemplo, en Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
área entre las curvas y=2x-4 y y^2=4x
```

para visualizar el área de interés.

El cálculo por franjas horizontales del área de interés es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy \\ &= \left(\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_{-2}^{4} \\ &= \left(4 + 8 - \frac{64}{12} \right) - \left(1 - 4 + \frac{8}{12} \right) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Cuestión 3.ª.3.B

[•] Calculemos utilizando arandelas horizontales el volumen engendrado, al girar alrededor del eje OY, por la región acotada del plano que queda encerrada entre las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la curva $y = \ln(x+1)$.

Cfr. ejercicio 10.18 (p. 305) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Esquema de resolución.— Conviene dibujar la situación para tener claro el volumen de interés y cómo calcularlo. Podemos hacerlo, por ejemplo, en Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
área entre las curvas y=ln(x+1) y x = 0 y x=1 y y=0
```

para visualizar el área de interés, y

```
girar la región entre y=ln(x+1) y y=0, 0<=x<=1, alrededor del eje y
```

para visualizar el sólido de revolución generado.

El cálculo por arandelas horizontales del volumen de interés es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 2} \pi 1^2 dy - \int_0^{\ln 2} \pi (e^y - 1)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\ln 2} (2e^y - e^{2y}) dy \\ &= \pi \left(2e^y - \frac{e^{2y}}{2} \right) \Big|_0^{\ln 2} \\ &= \pi \left(\left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Cuestión Op.A

[•] Con Sage:

a. hallemos valores de c para que la función $f(x) = \dfrac{1}{5^x - 1} + c$ sea impar;

b. representemos gráficamente dicha función para $c = 23$ en el intervalo $[-23, 23]$.

Cfr. ejercicio propuesto 2.3.7.10 (p. 69) de: Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Esquema de resolución.—

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

a.
```
var('x,c') # definiendo las variables
f(x) = 1/(5^x - 1) + c # definiendo f
# para que f sea impar debe satisfacerse f(x) + f(-x) = 0
solve(f(x) + f(-x) == 0, c) # hallando c
```

b.
```
plot(1/(5^x - 1) + 23,-23,23)
```
□

Cuestión Op.B

- [•] Con Sage:
  a. hallemos los dos puntos de corte entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 1$;
  b. mostremos en pantalla el mensaje «Los puntos de corte son:» y a continuación ambos puntos de corte en la forma $(x, y(x))$.

Esquema de resolución.—

a.
```
var('x') # definiendo la variable x
f(x) = x^2 # definiendo f
g(x) = x + 1 # definiendo g
pc = solve(f(x) == g(x), x) # hallando las abcisas de los puntos de corte y
    almacenando dichas abcisas en la variable pc
```

b.
```
x0 = pc[0].rhs() # miembro derecho de la igualdad que conforma la componente 0
    de pc
y0 = f(x0) # ordenada del punto de corte de abcisa x0
x1 = pc[1].rhs() # miembro derecho de la igualdad que conforma la componente 1
    de pc
y1 = f(x1) # ordenada del punto de corte de abcisa x1
show('Los puntos de corte son: (',x0,',',y0,') y (',x1,',',y1,')')
```
□

Para saber más

Abellanas Rapun, Lorenzo, y Galindo Tixaire, Alberto, *Teoría y problemas de métodos de cálculo*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, ISBN: 84-7615-388-0.

Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Es muy recomendable el estudio de estos textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral de una variable.

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.